جامعة البعث	امتحان مقرر التحليل العددي	الاسم :
كلية العلوم	لطلاب السنة الثانية– رياضيات	المدة : ساعة ونصف
	الفصل الأول 2015–2016	الدرجة : 100

السؤال الأول: (12+13=25 درجة)

1- اكتب العدد $(4d.a)_{16}$ بالنظام الثنائي ..

2- دوّر العدد $Z = 0.8546$ مرتبتين عشريتين واحسب الخطأ المطلق و الخطأ النسبي عند كل عملية تدوير.

السؤال الثاني: (15+30=45 درجة)

آ-بفرض لدينا الدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5
y_i	-3	1	-1	-3	1	17	51

والمطلوب:

1- أوجد بطريقة **نيوتن– غريغوري** كثيرة حدود الاستيفاء الموافقة لهذه الدالة .

2- احسب القيمة التقريبية لهذه الدالة عند النقطة $x = -2$ ، واحسب الخطأ المرتكب.

3- أوجد المشتق الأول للدالة عند $x = -1$ باستخدام كل الحدود الممكنة من كثيرة حدود نيوتن- غريغوري.

4- أوجد بطريقة **المستطيلات** تكامل الدالة المفروضة على المجال $[-1 \ , \ 5]$.

ب— أوجد بطريقة منشور تايلور حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = y^2 + 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

باستخدام خمسة حدود من متسلسلة تايلور، وذلك عند النقطة $x = 0.1$ حيث أن: $h = 0.1$.

السؤال الثالث: (15+15=30 درجة)

1- استخدم طريقة القاطع لإيجاد الجذر التقريبي الأول و الثاني للمعادلة:

$$x^4 - 2x^3 + 3x - 1 = 0$$

والموجود في المجال $[0 \ , \ 1]$.

2- أوجد بطريقة جاكوبي الحل التقريبي الأول والثاني لجملة المعادلات الخطية التالية:

$$8x - y - z = 6$$
$$x + 9y - 2z = 8$$
$$x - 2y + 10z = 9$$

علماً أن الحل متقارب ، والحل الابتدائي $X^{(0)} = (0,0,0)$.

انتهت الأسئلة

مدرس المادة د. عامر عباس

2016/2/15

سلم تصحيح مقرر التحليل العددي

لطلاب السنة الثانية- رياضيات الفصل الأول 2016-2015

السؤال الأول : (25=13+12 درجة)

(3) $(4d.a)_{16} = 4\times16^1 + 13\times16^0 + 10\times16^{-1} = (77.625)_{10}$

$77/2 = 38.5 \Rightarrow b_0 = 1 \quad ; \; 0.625\times2 = 1.25 \Rightarrow b_{-1} = 1$

$38/2 = 19 \Rightarrow b_1 = 0 \quad ; \; 0.25\times2 = 0.5 \Rightarrow b_{-2} = 0$

$19/2 = 9 \Rightarrow b_2 = 1 \quad ; \; 0.5\times2 = 1 \Rightarrow b_{-3} = 1$

(8) $9/2 = 4 \Rightarrow b_3 = 1 ;$

$4/2 = 2 \Rightarrow b_4 = 0$

$2/2 = 1 \Rightarrow b_5 = 0$

$1 \Rightarrow b_6 = 1$

(2) $(4d.a)_{16} = (1001101.101)_2$

(2) -2 ندور العدد $Z = 0.8546$ مرتبة عشرية فيكون: $\tilde{Z} = 0.855$

الخطأ المطلق المرتكب أثناء تدوير العدد مرتبة عشرية واحدة بالشكل:

(2) $\Delta_z = |z - \tilde{z}| = |0.8546 - 0.855| = 0.0004 = 4\times10^{-4}$ ،

و الخطأ النسبي في هذه الحالة يعطى بالشكل:

(2) $\delta_z = (\Delta_z)/(Z) = 0.0004/0.8546 = 0.000468055$

(2) ندور العدد $Z_1 = \tilde{Z} = 0.855$ مرتبة عشرية ثانية فيكون: $\tilde{Z}_1 = 0.86$

الخطأ المطلق المرتكب أثناء تدوير العدد مرتبة عشرية واحدة بالشكل:

(2) $\Delta_{z_1} = |Z_1 - \tilde{Z}_1| = |0.855 - 0.86| = 0.005 = 5\times10^{-3}$ ،

و الخطأ النسبي في هذه الحالة يعطى بالشكل:

(2) $\delta_{\tilde{z}} = (\Delta_{z_1})/(Z_1) = 0.005/0.855 = 0.005847953$

السؤال الثاني: (45 درجة) لنكتب جدول الفروق التقدمية للدالة المعطاة :

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
-1	-3						
		4					
0	1		-6				
		-2		6			
1	-1		0		0		
		-2		6		0	
2	-3		6		0		0
		4		6		0	
3	1		12		0		
		16		6			
4	17		18				
		34					
5	51						

(5)

ـرة حدود الاستيفاء بطريقة نيوتن عريغوري هي:

(4) $$p_n(x)=y_0+s\Delta y_0+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0+....+\frac{s(s-1)(s-2)...(s-(n-1))}{n!}\Delta^n y_0$$

(1) $$s=\frac{x-x_0}{h}=x+1$$

(4) $$P_3(x)=-3+4(x+1)+\frac{(x+1)(x)}{2!}(-6)+\frac{(x+1)(x)(x-1)}{3!}(6)$$
$$=x^3-3x^2+1$$

لحساب قيمة الدالة عند النقطة x=-2 نكتب :

(1) $$f(-2)\cong P_3(-2)=-19$$

لحساب الخطأ المرتكب نطبق العلاقة

(3) $$R(x_s)=C^s{}_4\ \Delta^4 y_0=\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

(2) وباعتبار أن $\Delta^4 y_0=0$ ، فإن الخطأ المرتكب يساوي الصفر

3- باستخدام كثيرة حدود نيوتن - عريغوري نجد أن المشتق الأول للدالة المعطاة يعطى بالشكل التالي:

(3) $$f'(x_0)=\frac{1}{h}[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0]$$

(2) بالتبديل نجد أن :
$$f'(x_0)=\frac{1}{h}[4-\frac{1}{2}(-6)+\frac{1}{3}6]=9$$

4-باستخدام دستور المستطيلات:

(3) $$\int_a^b f(x)dx=h[f_0+f_1+f_2+....+f_{n-1}]$$

بالتبديل نجد أن :

(2) $$\int_{-1}^{5} f(x)dx=1[-3+1-1-3+1+17]=12$$

ب- لنحسب المشتقات المتتالية عند النقطة $x_0=0$ ، فنجد أن :

(6)
$$y'=y^2+1 \qquad \Rightarrow y'(0)=1$$
$$y''=2yy' \qquad \Rightarrow y''(0)=0$$
$$y'''=2yy''+2y'^2 \qquad \Rightarrow y'''(0)=2$$
$$y^{(4)}=6y'y''+2yy''' \quad \Rightarrow y^{(4)}(0)=0$$

وبالتبديل في دستور تايلور:

(5) $$y_1=y(x_1)=y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2!}y''_0+\frac{h^3}{3!}y'''_0+\frac{h^4}{4!}+.....+\frac{h^n}{n!}=$$

(4) $$y_1=y(x_1)=y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2!}y''_0+\frac{h^3}{3!}y'''_0+\frac{h^4}{4!}=$$
$$=0+(0.1).1+\frac{(0.1)^3}{3!}(2)=0.100333333$$

السؤال الثالث (15+15=30 درجة)

1- نطبق الدستور:

(5)

$$x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

نجد أن :

(5)

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{1}{1-(-1)} = 0.5$$

$f(0.5) = 0.3125 \qquad f(0) \cdot f(0.5) < 0$

~~$f(x_0) = -0.1875 \Rightarrow f(0.5).f(1) < 0$~~

وهذا يعني أن الجذر موجود في المجال $[a_1 \,,\, b_1] = [0, 0.5]$

نطبق الدستور مرة أخرى ، نجد أن :

$$x_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \frac{0.5(\ldots) - (1)(-0.1875)}{0.3125 - (-0.1875)} = \text{~~0.578947368~~}\ 0.380952381$$

(5)

2- نكتب جملة المعادلات الخطية بالشكل التالي:

(5)

$$x = \frac{1}{8}(6 + y + z)$$

$$y = \frac{1}{9}(8 - x + 2z)$$

$$z = \frac{1}{10}(9 - x + 2y)$$

نكتب المعادلات التكرارية:

(4)

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{8}(6 + y^{(k)} + z^{(k)})$$

$$y^{(k+1)} = \frac{1}{9}(8 - x^{(k)} + 2z^{(k)})$$

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{10}(9 - x^{(k)} + 2y^{(k)})$$

نعوض الحل الابتدائي نجد الحل التقريبي الأول:

(3) $X^{(1)} = (6/8 \,;\, 8/9 \,;\, 9/10)$

نعوض هذا الحل في المعادلات التكرارية نجد الحل التقريبي الثاني:

(3) $X^{(2)} = (0.97361111 \,; 1.00555555;\ 1.0027777777)$

****

د. حامد عباس [redacted]

جامعة البعث
كلية العلوم

امتحان مقرر التحليل العددي

لطلاب السنة الثانية- رياضيات

الفصل الثاني 2014-2015

الاسم :

المدة : ساعة ونصف

الدرجة : 100

السؤال الأول: (25 درجة)

1- اكتب العدد $(1236.85)_{10}$ بالنظام الست عشري .

2- أوجد الخطأ المطلق و الخطأ النسبي للمركبين في حساب قيمة الدالة التالية:

$$f(x,y)=\frac{x}{y}$$

حيث أن: $x=-1.24$, $y=3.5$ عددان مدوّران.

السؤال الثاني: (45 درجة)

آ- بفرض لدينا الدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	-1	0	1	2	3	4
y_i	-2	1	0	1	10	33

1 - أوجد بطريقة الفروق المقسومة كثيرة حدود الاستيفاء الموافقة لهذه الدالة .

2- احسب القيمة التقريبية لهذه الدالة عند النقطة $x=5$ ، واستنتج الخطأ المرتكب ، واحسب بطريقة سيمبسون إن أمكن تكامل الدالة المفروضة على المجال [4 , 1-] .

3- أوجد المشتق الأول للدالة عند النقطة $x=-1$ بطريقة الأمثال غير المحددة (مستخدماً ثلاثة حدود)

ب- أوجد بطريقة أولر الحل للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y'=y-x^2+1$$
$$y(0)=0.5$$

وذلك عند النقطة $x=1$ حيث أن: $h=0.2$.

السؤال الثالث: (30 درجة)

1- أوجد بطريقة نيوتن الحل التقريبي الأول لجملة المعادلتين:

$$x^2+y-11=0$$
$$x+y^2-7=0$$

معتبراً أن الحل الابتدائي هو: $X^{(0)}=(3\ ,-2)$.

2- أوجد بطريقة سيدل الحل التقريبي الأول والثاني لجملة المعادلات الخطية التالية:

$$10x+y+z=12$$
$$2x+10y+z=13$$
$$2x+2y+10z=14$$

علماً أن الحل متقارب ، والحل الابتدائي $X^{(0)}=(0,0,0)$.

انتهت الأسئلة

مدرس المادة : د. حامد عباس

2015/7/8

سلم تصحيح مقرر التحليل العددي

لطلاب السنة الثانية- رياضيات الفصل الثاني 2014-2015

السؤال الأول : (25 درجة)

1- لنكتب العدد $(1236.85)_{10}$ بالنظام الست عشري:

$1236/16 = 77.25 \Rightarrow b_2 = 4$, $0.85\times16 = 13.6 \Rightarrow b_{-1} = d$

(8) $77/16 = 4.8125 \Rightarrow b_3 = d$, $0.6\times16 = 9.6 \Rightarrow b_{-2} = 9$

$4 \Rightarrow b_7 = 4$, 0.6 مكـــــرر

وبالتالي : $(1236.85)_{10} = (4d4.d\ \underline{\underline{9}}...)_{16}$

(2) مكـــــرر

2- الخطأ المطلق المرتكب يعطى حسب العلاقة:

(4) $$(\delta_f)_{max} \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta_y$$

(2) $$= \frac{1}{y}\delta_x + \left|\frac{-x}{y^2}\right|\delta_y$$

(2) $$\delta_x = 5\times10^{-3} \quad , \quad \delta_y = 5\times10^{-2}$$

(2) $$\Rightarrow (\delta_f)_{max} = \frac{1}{3.5}.5\times10^{-3} + \frac{1.24}{(3.5)^2}.5\times10^{-2} = 0.00648979$$

أما الخطأ النسبي المرتكب فنجده من العلاقة:

(3) $$(e_f)_{max} \le \frac{\delta_f}{f}$$

(2) $$(e_f)_{max} \le \frac{0.00648979}{1.24/3.5} = 0.0183179556$$

السؤال الثاني (45 درجة) لنكتب جدول الفروق المقسومة للدالة المفروضة:

x_i	y_i	Dy_i	D^2y_i	D^3y_i	D^4y_i	D^5y_i
-1	-2					
		3				
0	1		-2			
		-1		1		
1	0		1		0	
		1		1		0
2	1		4		0	
		9		1		
3	10		7			
		23				
4	33					

(5)

كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة الفروق المقسومة:

$$p_n(x) = y_0 + Dy_0(x-x_0) + D^2y_0(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
(5) $$\ldots + D^n y_0(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$p_4(x) = y_0 + Dy_0(x-x_0) + D^2y_0(x-x_0)(x-x_1) + D^3y_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

بالتعويض نجد كثيرة حدود الاستيفاء المطلوبة: $p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ (3)

إن قيمة الدالة عند النقطة x=-2 تساوي تقريباً قيمة كثيرة حدود الاستيفاء الناتجة عند تلك النقطة، و ذلك حسب علاقة الاستيفاء، أي أن

(2) $$f(-2) \cong P_4(-2) = -15 \quad , \; p(5) = p_3(5) = 76$$

باعتبار أن الصيغة التحليلية للدالة المفروضة غير معلومة، فإنه عند حساب الخطأ المرتكب نبدل في علاقة الخطأ العام للاستيفاء.

(3) $$R(x) = \frac{\omega(x) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \omega(x) D^{n+1} y_0 \;,$$
$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

(2) وباعتبار أن $D^5y_0=0$، وبالتالي يكون الخطأ المرتكب يساوي الصفر

-باستخدام دستور سيمسون.

(3) $$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{n-2}) + f_n]$$

(2) ولكن عدد المجالات الجزئية هو عدد ~~زوجي~~ فردي فلا يمكننا حساب التكامل بطريقة سيمسون

- المشتق الأول للدالة المعطاة يعطى بالشكل التالي:

(3) $$f'(x_0) \cong \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

(2) بالتبديل نجد أن: $$f'(0) = \frac{-3(-2) + 4(1) - 0}{2} = 5$$

(5) ب- بتطبيق دستور أولر $y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n)$ نجد أن:

$$y_1 = y(0.2) = 0.5 + 0.2(0.5 - 0 + 1) = 0.8$$
$$y_2 = y(0.4) = 0.8 + 0.2(0.8 - (0.2)^2 + 1) = \sout{1.08}\; 1.152$$
(10) $$y_3 = y(0.6) = 1.\sout{08}152 + 0.2(\sout{1.08}\,1.152 - (0.4)^2 + 1) = \sout{1.464}\; 1.5504$$
$$y_4 = y(0.8) = \sout{1.464}\,1.5504 + 0.2(\sout{1.464}\,1.5504 - (0.6)^2 + 1) = \sout{1.8848}\; 1.98848$$
$$y_5 = y(1) = 1.98848 + 0.2(1.98848 - (0.8)^2 + 1) = 2.55876$$

السؤال الثالث (30 درجة)

لدينا:

(4) $$X^{(n+1)} = X^{(n)} - W^{-1}(X^{(n)}) f(X^{(n)})$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 11 \\ x + y^2 - 7 \end{pmatrix}$$

2A

Scanned by CamScanner

من أجل الحل الابتدائي يكون :

(2) $$f(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومصفوفة جاكوبي تكتب بالشكل التالي:

(3) $$W(X) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow W(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |W(X^{(0)})| = -25$$

أما مقلوب مصفوفة جاكوبي ، فيكتب بالشكل التالي:

(3) $$W^{-1}(X^{(0)}) = \frac{1}{-25}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 & 1/25 \\ 1/25 & -6/25 \end{pmatrix}$$

بالتعويض في الدستور ، نحصل على التقريب الأول:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - W^{-1}(X^{(0)}) f(X^{(0)}) =$$

(3) $$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/25 & 1/25 \\ 1/25 & -6/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.36 \\ -2.16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.64 \\ -1.84 \end{pmatrix}$$

2- نكتب جملة المعادلات الخطية بالشكل التالي:

(5) $$x = \frac{1}{10}(12 - y - z)$$
$$y = \frac{1}{10}(13 - 2x - z)$$
$$z = \frac{1}{10}(14 - 2x - 2y)$$

نكتب المعادلات التكرارية:

(4) $$x^{(k+1)} = \frac{1}{10}(12 - y^{(k)} - z^{(k)})$$
$$y^{(k+1)} = \frac{1}{10}(13 - 2x^{(k+1)} - z^{(k)})$$
$$z^{(k+1)} = \frac{1}{10}(14 - 2x^{(k+1)} - 2y^{(k+1)})$$

نبدل الحل الابتدائي نجد الحل التقريبي الأول:

(3) $$X^{(1)} = (1.2 \;;\; 1.06 \;;\; 0.948)$$

نبدل هذا الحل في المعادلات التكرارية نجد الحل التقريبي الثاني:

(3) $$X^{(2)} = (0.9992 \;;\; 1.00536 \;;\; 0.999088)$$

****

د. حامد عباس

38

جامعة البعث　　　امتحان مقرر التحليل العددي　　　الاسم :

كلية العلوم　　　لطلاب السنة الثانية- رياضيات　　　المدة : ساعتان

الفصل الأول 2013-2014　　　الدرجة : 100

....

السؤال الأول: (25 درجة)

1- اكتب العدد $(38.5625)_{10}$ بالنظام الثنائي .

2- أوجد ناتج مايلي: $(11)_2 \times (110101)_2$

3- أوجد الخطأ المطلق و الخطأ النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة التالية:

$$f(x,y) = xe^{y}$$

حيث أن: $x = 0.15\ ;\ y = 0.5$ هي أعداد مدوّرة.

السؤال الثاني: (35 درجة)

1- لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ للمعطاة بالجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	11	34

و المطلوب :

آ- أوجد كثيرة حدود الاستيفاء لهذه الدالة بطريقة لاغرانج، ثم أوجد قيمة هذه الدالة عند النقطة $x = 1$

ب- احسب بطريقة شبه المنحرف القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^3 f(x)dx$.

2- أوجد بطريقة أولر حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' = y + 3x$$
$$y(0) = -1$$

عند النقطة $x = 0.5$ ، معتبراً أن $h = 0.1$

السؤال الثالث: (40 درجة)

1- ادرس تقارب حل المعادلة :

$$x - \sqrt{x+1} = 0$$

بطريقة التقريبات المتتالية(النقطة الثابتة) ، ثم أوجد الجذر الموجود في المجال [2 , 1] ، وذلك باختيار $\varepsilon = 0.005$ ، و $x_0 = 1$ ، بفرض أن: $g(x) = \sqrt{x+1}$

2- أوجد بطريقة التحليل إلى عوامل LU حل مجموعة المعادلات الخطية التالية:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$$

.... انتهت الأسئلة ....

مدرس المادة : د. حامد عباس

2014/2/11

سلم تصحيح مقرر التحليل العددي

لطلاب السنة الثانية- رياضيات

الفصل الأول 2013-2014

السؤال الأول : (25 درجة)

لنكتب العدد $(76.8203125)_{10}$ بالنظام الثنائي:

$38/2=19 \Rightarrow b_2=0$, $0.5625\times 2=1.125 \Rightarrow b_{-4}=1$

$19/2=9 \Rightarrow b_3=1$, $0.125\times 2=0.25 \Rightarrow b_{-5}=0$

$9/2=4 \Rightarrow b_4=1$, $0.25\times 2=0.5 \Rightarrow b_{-6}=0$

(6) $4/2=2 \Rightarrow b_5=0$, $0.5\times 1=1 \Rightarrow b_{-7}=1$

$2/2=1 \Rightarrow b_6=0$,

$1 \Rightarrow b_7=1$,

(1) وبالتالي $(38.5625)_{10}=(100110.1001)_2$.

-2

```
  110101
      11  ×
  ------
  110101
 110101   +
 --------
10011111
```

(3) -3 $x=3.15\ ;\ y=2.5$ حيث أن: ، $f(x,y)=xe^y$ الخطأ المطلق المرتكب هو:

$$(\Delta_f)_{max} \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta_y$$

(2) ولكن لدينا: $\delta_y=5\times 10^{-2}$ ، $\delta_x=5\times 10^{-3}$ ، وبالتالي يكون :

(5) $$(\Delta_f)_{max} \le \left|e^y\right|\Delta_x + \left|xe^y\right|\Delta_y$$

بالتبديل نجد أن : $(\Delta_f)_{max} \le 0.020609015$

(5) $$(\delta_f)_{max} = \left(\frac{\Delta_f}{f}\right)_{max} \le \frac{0.020609015}{0.15\times e^{0.5}} = 0.083333333$$

السؤال الثاني: (35 درجة)

نوجد أولاً كثيرات حدود لاغرانج $L_i(x)$:

(3) $$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)}=$$

$$=-\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)$$

(3) $$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x)(x-2)(x-3)}{(1)(-1)(-2)}=$$

$$=\frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x)$$

(3) $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x)(x-1)(x-3)}{(2)(1)(-1)} =$

$= -\frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x)$

(3) $L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x)(x-1)(x-2)}{(3)(2)(1)} =$

$= \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)$

بالتبديل في صيغة لاغرانج الاستيفائية نجد أن:

(2) $P_3(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 +$

$= -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)(1) + \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x)(2) +$

(2) $-\frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x)(11) + \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)(34) = x^3 + x^2 - x + 1$

نبدل الآن في كثيرة الحدود هذه كل x بالعدد 1- نجد المطلوب:

(2) $f(-1) \cong P_3(-1) = 2$

حسب دستور شبه المنحرف لحساب التكاملات :

(2) $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n)$

(2) $\int_0^3 f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3)$

$= \frac{1}{2}[1 + 2(2) + 2(11) + 34] = 30.5$

(3) 2- بتطبيق دستور أولر $y_{k+1} = y_k + hy'_k = y_k + hf(x_k, y_k)$ نجد أن :

$y' = -y + 3x$

$y_1 = y(0.1) = -1 + 0.1(-1 + 3\times 0) = -1.1$

$y_2 = y(0.2) = -1.1 + 0.1(-1.1 + 0.3) = -1.18$

(10) $y_3 = y(0.3) = -1.18 + 0.1(-1.18 + 0.6) = -1.238$

$y_4 = y(0.4) = -1.238 + 0.1(-1.238 + 0.9) = -1.2718$

$y_5 = y(0.5) = -1.2718 + 0.1(-1.2718 + 1.2) = -1.27898$

السؤال الثالث: (40 درجة)

-1

(6) $\forall x \in [1, 2] \Rightarrow g(x) = \sqrt{x+1} \in [1, 2]$

$\forall x \in [1, 2] \Rightarrow |g'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right| \leq 1$

(2) نكتب المعادلة التكرارية: $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$ ثم نرتب النتائج في الجدول التالي:

$x_1 = \sqrt{x_0 + 1} = 1.41421356$

$x_2 = \sqrt{x_1 + 1} = 1.553773974$

(5) $x_3 = \sqrt{x_2 + 1} = 1.598053182$

$x_4 = \sqrt{x_3 + 1} = 1.611847754$

$x_5 = \sqrt{x_4 + 1} = 1.616121206$

(2) نلاحظ أن: $x^* \cong x_5 = 1.616121206$ [illegible] $= 0.0042734766 < 0.005$

(4) $$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \qquad , \quad i \geq j$$

$$u_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}) / l_{ii} \qquad , \quad i < j$$

(5) $$l_{i1} = a_{i1} \Rightarrow \quad l_{11} = a_{11} = 3 \ , \quad l_{21} = a_{21} = 1 \ , \quad l_{31} = a_{31} = 2$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \Rightarrow \qquad u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = -\frac{1}{3} \qquad , \qquad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{2}{3}$$

وذلك على اعتبار أن : $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$.

(4) $$l_{22} = \frac{7}{3} \ , l_{32} = -\frac{4}{3} \ , u_{23} = 1 \ , l_{33} = -1$$

المرحلة الأولى من الحل تتضمن إيجاد المتجه المساعد Y ، ويتم ذلك بتطبيق العلاقة :

(3) $$LY = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وهي عبارة عن مجموعة معادلات خطّية مثلثية الشكل ، وتكتب كما يلي:

$$3y_1 = 1$$

(3) $$y_1 + \frac{7}{3} y_2 = 1 \qquad \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3} , \quad y_2 = \frac{2}{7} , \quad y_3 = -\frac{5}{7}$$

$$2y_1 - \frac{4}{3} y_2 - y_3 = 1$$

بالتعويض التقدمي نجد أن :

المرحلة الثانية هي إيجاد حل مجموعة المعادلات الخطّية المفروضة ، وذلك بتطبيق المساواة (5) كما يلي :



$$UX = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

ومنه نجد :

$$x_1 - \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 = \frac{1}{3}$$

(3) $$x_2 + x_3 = \frac{2}{7} \qquad \Rightarrow x_1 = \frac{8}{7} \ , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_3 = -\frac{5}{7}$$

$$x_3 = -\frac{5}{7}$$

****

3B

د. حامد عباس

جامعة البعث — امتحان مقرر التحليل العددي — الاسم:

كلية العلوم — لطلاب السنة الثالثة– رياضيات — المدة : ساعتان

الدورة الإضافية 2012–2013 — الدرجة : 100

السؤال الأول: (30 درجة)

1- اكتب العدد $(4c.d2)_{16}$ بالنظام الثنائي .

2- أوجد ناتج مايلي: $(110)_2 \times (110101)_2$

3- أوجد الخطأ المطلق و الخطأ النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة التالية:

$f(x,y) = x\ln y$ ، حيث أن: $x = 3.14\ ;\ y = 2.5$ هي أعداد مدوّرة.

السؤال الثاني: (30 درجة)

1-لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ المعطاة بالجدول التالي:

X_i	0	1	2	3
y_i	1	2	11	34

و المطلوب :

آ-أوجد كثيرة حدود الاستيفاء لهذه الدالة بطريقة الفروق المقسومة، ثم أوجد قيمة هذه الدالة عند النقطة $x = 1.5$ واحسب قيمة الخطأ المرتكب.

ب- احسب بطريقة شبه المنحرف القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^3 f(x)dx$.

2–أوجد بطريقة منشور تايلور حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = y^2 + 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

باستخدام خمسة حدود من متسلسلة تايلور، وذلك عند النقطة $x = 0.1$ حيث أن: $h = 0.1$.

السؤال الثالث: (40 درجة)

1 -أوجد بطريقة نيوتن رافسون الجذر التقريبي للمعادلة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ إذا علمت أن $x_0 = 1 \qquad \varepsilon = 0.03$

2- لتكن لدينا مجموعة المعادلات الخطّية التالية:

$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 7$$

، و المطلوب :

أ- دراسة تقارب الحل بطريقة التقريبات المتتالية.

ب- إيجاد الحل التقريبي الأول والثاني فقط لمجموعة المعادلات الخطية المفروضة بطريقة سيدل إذا علمت أن $X^{(0)} = (0,0,0)$

ج-حساب الخطأ المرتكب بعد 10 تقريبات متتالية للحل .

انتهت الأسئلة

2013/8/29 — مدرس المادة : د . حامد عباس

~ 6

سلم تصحيح مقرر التحليل العددي

لطلاب السنة الثالثة- رياضيات

الدورة الإضافية 2012-2013

السؤال الأول : (30 درجة)

(2) $(4c.d2)_{16} = 4\times16^1+12\times16^0+13\times16^{-1}+2\times16^{-2} = (76.8203125)_{10}$

لنكتب العدد $(76.8203125)_{10}$ بالنظام الثنائي:

(6)

$76/2=38 \Rightarrow b_1=0$, $0.8203125\times2=1.640625 \Rightarrow b_{-1}=1$

$38/2=19 \Rightarrow b_2=0$, $0.640625\times2=1.28125 \Rightarrow b_{-2}=1$

$19/2=9 \Rightarrow b_3=1$, $0.28125\times2=0.5625 \Rightarrow b_{-3}=0$

$9/2=4 \Rightarrow b_4=1$, $0.5625\times2=1.125 \Rightarrow b_{-4}=1$

$4/2=2 \Rightarrow b_5=0$, $0.125\times2=0.25 \Rightarrow b_{-5}=0$

$2/2=1 \Rightarrow b_6=0$, $0.25\times2=0.5 \Rightarrow b_{-6}=0$

$1 \Rightarrow b_7=1$, $0.5\times1=1 \Rightarrow b_{-7}=1$

(2) وبالتالي $(76.8203125)_{10} = (1001100.1101001)_2$,

-2 (5)

```
  110101
     110  ×
 -------
  000000
 110101
110101    +
---------
100111110
```

(3) 3- الخطأ المطلق المرتكب هو: $(\Delta_f)_{max} \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta_y$

(2) ولكن لدينا: $\delta_y = 5\times10^{-2}$, $\delta_x = 5\times10^{-3}$ ، وبالتالي يكون :

(5) $(\Delta_f)_{max} \le |\ln y|\Delta_x + \left|\frac{x}{y}\right|\Delta_y$ (3)

بالتبديل نجد ان : $(\Delta_f)_{max} \le 0.067381453659 3$ (2)

(5) $(\delta_f)_{max} = (\frac{\Delta_f}{f})_{max} \le \frac{0.067381453659}{3.14\times\ln(2.5)} = 0.023419491335$ (2) (3)

السؤال الثاني: (30 درجة)

(4) 1- لنكتب جدول الفروق المقسومة للدالة المفروضة:

x_i	y_i	Dy_i	D^2y_i	D^3y_i
0	1			
		1		
1	2		4	
		9		1
2	11		7	
		23		

تعطى كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة الفروق المقسومة بالعلاقة

(4) $$P_n(x) = y_0 + Dy_0(x - x_0) + D^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \dots + D^n y_0(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

بالتعويض نجد كثيرة حدود الاستيفاء المطلوبة:

(2) $$P_4(x) = 1 + 1(x) + (4)(x)(x-1) + (1)(x)(x-1)(x-2) = x^3 + x^2 - x + 1$$

(1) $$f(1.5) \cong P_4(1.5) = 5.125$$

(3) $$R(x) = \frac{\omega(x) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \omega(x) D^{n+1} y_0 \quad , \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

لحساب الخطأ المرتكب نضيف أي نقطة ولتكن النقطة x=4 نجد أن $y_3 = 77$, $Dy_3 = 43$,

(2) $D^2 y_3 = 10$, $D^3 y_3 = 1$ $D^4 y_3 = 0$,.

وبالتالي يكون الخطأ المرتكب يساوي الصفر.

حسب دستور شبه المنحرف لحساب التكاملات :

(2) $$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

(2) $$\int_0^3 f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3)$$

$$= \frac{1}{2}[1 + 2(2) + 2(11) + 34] = 30.5$$

2-لنحسب المشتقات المتتالية عند النقطة $x_0 = 0$ ، فنجد أن :

(4)

$$y' = y^2 + 1 \quad \Rightarrow y'(0) = 1$$

$$y'' = 2yy' \quad \Rightarrow y''(0) = 0$$

$$y''' = 2yy'' + 2y'^2 \quad \Rightarrow y'''(0) = 2$$

$$y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy''' \Rightarrow y^{(4)}(0) = 0$$

بالتبديل في دستور تايلور:

(4) $$y_1 = y(x_1) = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!} + \dots + \frac{h^n}{n!} =$$

(2) $$y_1 = y(x_1) = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!} =$$

$$= 0 + (0.1).1 + \frac{(0.1)^3}{3!}(2) = 0.100333333$$

السؤال الثالث (40 درجة)

1- بتطبيق دستور نيوتن:

(5) $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(3) $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.45$$ [illegible]

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3$$ [illegible]

(3) $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.325200399$$

(3) $x^* \cong x_3 = 1.325200399$ ، $|x_3 - x_2| = 0.022625688 < 0.03$ يلاحظ أن:

2-نكتب مجموعة المعادلات الخطية المفروضة بالشكل $X = \beta + \alpha X$ فنجد :

(3)
$$x_1 = 3.25 - 0.125x_2 - 0.125x_3$$
$$x_2 = 1.4 - 0.2x_1 + 0.2x_3$$
$$x_3 = 1.4 - 0.2x_1 + 0.2x_2$$

حيث أن :

(3) $$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0.125 & -0.125 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} 3.25 \\ 1.4 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

حتى يكون الحل متقارباً يجب أن يتحقق أحد شروط التقارب ، أي أن :

(3) $$\|\alpha\|_{II} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max(0.4\ ,\ 0.325\ ,\ 0.325) = 0.4 < 1$$

وبالتالي فإن الحل متقارب من الحل الحقيقي باستخدام طرائق التقريبات المتتالية.

نكتب المعادلات التكرارية نجد أن :

(2)
$$x_1^{(k+1)} = 3.25 - 0.125x_2^{(k)} - 0.125x_3^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = 1.4 - 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} = 1.4 - 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)}$$

نبدل الحل الابتدائي نجد أن :

(3) $$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.25 \\ 0.75 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

نستخدم الآن $X^{(1)}$ من أجل الحصول على التقريب الثاني للحل كما يلي:

(3) $$X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.04375 \\ 0.97125 \\ 1.1855 \end{pmatrix}$$

لنفرض الآن أن الخطأ المرتكب هو R ، ولنحسب هذا الخطأ بعد 10 تقريبات متتالية وذلك بحسب العلاقة:

(2) $$\|X - X^{(k)}\|_{II} \le \frac{\|\alpha\|_{II}^{k}}{1 - \|\alpha\|_{II}} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{II}$$

(2) $$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{II} = 3.25 + 0.75 + 0.9 = 4.9$$

(2) $$R = \|X - X^{(k)}\|_{II} \le \frac{(0.4)^{10}(4.9)}{1 - 0.4} = 0.000856337$$

****

د. حامد عباس